École Normale Supérieure de Rennes

Rapport du stage de fin de Master 1

Bimodules de Soergel

Octave Lacourte

Maître de stage : Simon Riche

9 Mai 2016 — 19 Juin 2016

Préface

J'ai effectué un stage à l'Université Blaise Pascal du 9 mai 2016 au 19 juin 2016 pour travailler sur une une introduction à la théorie de Soergel. Après quelques rappels sur les systèmes de Coxeter, l'objectif du stage était de construire l'algèbre de Hecke d'un système de Coxeter (W, S) ainsi que les polynômes de Kazhdan-Lusztig puis les relier à une certaine catégorie avec un morphisme d'anneau.

Je remercie l'Université Blaise Pascal de m'avoir accueilli pour ce stage et plus particulièrement M. Simon Riche, Chargé de Recherche CNRS, d'avoir accepté d'être mon tuteur pour ce stage. Il a su m'aider et m'a laissé le choix dans l'accompagnement et l'organisation du stage. Il m'a fait découvrir toute une théorie que j'ai été curieux d'apprendre même si je n'ai pu que l'effleurer. En effet le niveau requis et la durée du stage ne me permettaient pas de voir toutes les facettes de cette théorie. Toutefois cela a confirmé mon envie de poursuivre dans ce domaine et je ne manquerai pas de continuer cette théorie dans les prochaines années.

Table des matières

Introduction

Nous allons d'abord énoncer quelques rappels sur les systèmes de Coxeter. Puis nous prouverons des lemmes et introduirons l'objet R qui vont nous permettre de définir l'algèbre de Hecke d'un système de Coxeter ainsi que la base de Kazhdan-Lusztig. Après avoir définit la notation $< \mathcal{R} >$ nous prouverons le théorème fondamentale de Soergel pour les groupes diédraux et enfin nous le prouverons pour tout système de Coxeter.

Théorème. *Soit V une représentation réflexion vecteur fidèle du système de Coxeter (W, S) sur un corps infini. Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke et R l'anneau des fonctions polynomiales sur V. Il existe un unique morphisme d'anneau*

$$\epsilon : \mathcal{H} \to < \mathcal{R} >$$

tel que $\epsilon(v) =< R[1] >$ et $\epsilon(T_s + 1) =< R \otimes_{R^s} R >$ pour tout $s \in S$.

1 Systèmes de Coxeter

Nous avons besoin de plusieurs rappels sur les systèmes de Coxeter afin de définir l'algèbre de Hecke, mais aussi afin de traiter le cas des groupes diédraux.

Définition 1.1. On note $\Delta_{s,s'}$ le mot $ss'ss' \ldots .ss'$, ordre(ss') fois quand il existe. Un **système de Coxeter** est la donnée d'un couple (W, S) où W est un groupe, S une partie génératrice de W constituée d'involution et tel que $\Delta_{s,s'} = \Delta_{s',s}$. Ces relations sont appelées relations de tresses.
Tout élément x de W s'écrit comme produit d'un nombre fini d'élément de S donc est l'image dans W d'un mot du monoïde libre S^* engendré par S.

Définition 1.2. On note ℓ la fonction longueur sur W.

Définition 1.3. On appelle $s_1 \ldots .s_k$ décomposition réduite d'un élément $w \in W$ si $w = s_1 \ldots .s_k$ et si $k = \ell(w)$.

<u>Notations :</u>
On écrit $\mathcal{T} = \{u \in W \mid \exists v \in W,\ vuv^{-1} \in S\}$.
On note $\widehat{s_i}$ lorsqu'on veux dire que cet élément n'est pas dans la décomposition, c'est-à-dire : $s_1 \ldots .s_{i-1}s_{i+1} \ldots .s_n = s_1 \ldots .\widehat{s_i} \ldots .s_n$.
On note aussi ${}^w s = wsw^{-1}$.

On considère maintenant (W, S) un système de Coxeter.

Proposition 1.1. *Pour tout $w \in W$ et tout $s \in S$, on a $\ell(sw) \neq \ell(w)$ et $\ell(ws) \neq \ell(w)$.*

Démonstration. Soit l'application qui pour tout $s \in S$ associe -1. Elle se prolonge en un morphisme qui pour tout $x \in W$ associe $(-1)^{\ell(w)}$.Soit $w \in W$ et $s \in S$. On a alors $(-1)^{\ell(ws)} = -(-1)^{\ell(w)}$. D'où $\ell(ws) \neq \ell(w)$.

□

Nous allons avoir besoin de ce lemme la preuve peux se trouver dans [JM].

Lemme 1.2. *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit N l'application suivante :*

$$N : \begin{cases} S^* & \to & \mathcal{P}(\mathcal{T}) \\ s_1 \ldots .s_k & \mapsto & \{u \in \mathcal{T} \mid u \text{ apparait un nombre impair de fois dans } \{s_k,\ {}^{s_k}s_{k-1}, \ldots, {}^{s_k \ldots . s_2}\, s_1\}\} \end{cases}$$

Alors $N(s_1 \ldots .s_k)$ ne dépend que de l'image w de $s_1 \ldots .s_k$ dans W et est noté $N(w)$. De plus il a $\ell(w)$ éléments.

Proposition 1.3. *Soit $w \in W$, si $s_1 \ldots s_k$ est une décomposition réduite de w alors $N(w) = \{s_k,\ {}^{s_k}s_{k-1}, \ldots, {}^{s_k \ldots s_2}\, s_1\}$*

Démonstration. Par définition de N, il est clair que $N(w) \subset \{s_k,\ {}^{s_k}s_{k-1}, \ldots, {}^{s_k \ldots s_2}\, s_1\}$. On obtient l'égalité par l'égalité des cardinaux. $\square$

Théorème 1.4. *Soit S un ensemble d'involution engendrant W. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) (W, S) est un système de Coxeter.
ii) (condition d'échange) Si $s_1 \ldots s_k$ est une décomposition de W et $s \in S$ est tel que $\ell(ws) \leq \ell(w)$ alors il existe i tel que $ws = s_1 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k$.
De plus sous ces conditions on a :
iii) (Lemme de Matsumoto) deux décompositions réduites d'un même mot sont équivalentes par relations de tresses, c'est-à-dire :
Pour tout $f : S \to M$, M un monoïde, que l'on étend en une application f de S^* dans M, telle que $f(\Delta_{s,s'}) = f(\Delta_{s',s})$ quand $\Delta_{s,s'}$ existe, est constante sur l'ensemble des décompositions réduites d'un élément donné de W.

Démonstration.
On commence par i) implique ii).
Si $\ell(ws) \leq \ell(w)$ alors on a forcément $\ell(ws) < \ell(w)$. Ainsi en accolant s à une décomposition réduite de ws on obtient une décomposition réduite de w qui finit par s. D'où par la proposition 1.3 on a $s \in N(w)$ et par le lemme on obtient qu'il existe i tel que $s = s_k \ldots s_i \ldots s_k$. D'où $ws = s_1 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k$.

On montre maintenant ii) implique iii). Soit $f : S^* \to M$ tel que $f(\Delta_{s,s'}) = f(\Delta_{s',s})$ (c'est un morphisme de monoïde). On montre par récurrence sur $\ell(w)$ que deux décomposition réduite de w ont même image dans M.
Pour l'initialisation il est clair que si $\ell(w) = 1$ alors w n'a qu'une décomposition réduite.
Concernant l'hérédité on le fait par l'absurde, soient $s_1 \ldots s_k$ et $s'_1 \ldots s'_k$ deux décompositions réduite de w d'images distinctes par f.
Comme $s_1 \ldots s_k s'_k = s'_1 \ldots s'_{k-1}$, on obtient par la condition d'échange, il existe i tel que $s_1 \ldots s_k s'_k = s_1 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k$.
D'où $s_1 \ldots s_k = s_1 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k s'_k$.
On a $s_1 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k$ et $s'_1 \ldots s'_{k-1}$ sont deux décompositions réduites d'un même élément. Ainsi par hypothèse de récurrence on obtient que $f(s_1 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k s'_k) = f(s_1 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k) f(s'_k) = f(s'_1 \ldots s'_{k-1}) f(s'_k) = f(s'_1 \ldots s'_k)$. Si $i \neq 1$, on peux refaire le même raisonnement que précédemment et on obtient $f(s_1 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k s'_k) = f(s_1 \ldots s_k)$. Donc $f(s'_1 \ldots s'_k) = f(s_1 \ldots s_k)$, ce qui est en contradiction avec ce qu'on a supposé.
Donc $i = 1$, ainsi $s_2 \ldots s_k s'_k$ est une décomposition réduite de w avec $f(s_2 \ldots s_k s'_k) = f(s'_1 \ldots s'_k)$ donc $f(s_2 \ldots s_k s'_k) \neq f(s_1 \ldots s_k)$.
Ainsi avec le même raisonnement on arrive à $s_3 \ldots s_k s'_k s_k$ une décomposition de w tel que $f(s_3 \ldots s_k s'_k s_k) \neq f(s_2 \ldots s_k s'_k)$.
Finalement en répétant l'opération plusieurs fois on arrive à $f(\Delta_{s_k, s'_k}) \neq f(\Delta_{s'_k, s_k})$ ce qui est absurde.

Pour montrer que iii) implique i) il suffit de montrer que toute application $f : S \to G$, G un groupe, telle que $f(s^2) = 1$ et $f(\Delta_{s,s'}) = f(\Delta_{s',s})$ induit un homomorphisme $W \to G$.
Par iii), on a que f peut se prolonger en une application $W \to G$ par $f(s_1 \ldots s_k) = f(s_1) \ldots f(s_k)$. Elle est bien définie car f est constante sur les décompositions réduites d'un élément donné de W. Il suffit de montrer que $f(ww') = f(w)f(w')$, pour tout $w, w' \in W$. Comme S engendre W, il suffit de montrer que pour tout $s \in S, w \in W,\ f(sw) = f(s)f(w)$. Par la proposition 1.1 on

a forcément $l(sw) \neq l(w)$.
Si $\ell(sw) > \ell(w)$, alors comme f est un morphisme de monoïde, on a $f(ss_1 \ldots . s_k) = f(s)f(s_1 \ldots . s_k) = f(s)f(w)$.
Si $\ell(sw) < \ell(w)$, alors $w = sw_1$ et $\ell(sw_1) > \ell(w_1)$, on en déduit avec le cas précédent que $f(s)f(sw) = f(ssw) = f(w)$. D'où $f(s)^2 f(sw) = f(sw) = f(s)f(w)$.

□

On montre maintenant qu'il existe une représentation de W que l'on qualifiera de **représentation naturelle**. On note $m_{s,t}$ =longueur de $\Delta_{s,t}$ si cet ordre existe sinon on pose $m_{s,t} = +\infty$. Soit V un espace vectoriel de dimension fini égal à $|S|$. On note $(e_s)_{s\in S}$ une base de V. On note $< .,. >$ la forme bilinéaire définit comme $< e_s, e_t >= -\cos(\frac{\Pi}{m_{s,t}})$, c'est clairement un produit scalaire par définition des $m_{s,t}$. On pose $\rho : W \to GL(V)$ tel que pour tout $s \in S$ et pour tout $x \in V$ on a $\rho(s)(x) = x - 2 < x, e_s > e_s$.

Lemme 1.5. *On a ρ qui est une représentation de W.*

Démonstration. On montre d'abord que pour tout $s \in S$, s préserve le produit scalaire. En effet soient $s \in S$, $x, y \in V$, on a $< s(x), s(y) >=< x - 2 < x, e_s > e_s, y - 2 < y, e_s > e_s >=$
$< x, y > -2 < x, e_s >< e_x, y > -2 < y, e_s >< e_s, x > +4 < x, e_s >< y, e_s >< e_s, e_s >=$
$< x, y >$.

Pour vérifier que l'on a bien une représentation de groupe, il faut vérifier que pour tous $s, t \in S$, l'ordre de $\rho(st)$ est $m_{s,t}$. Soient $s, t \in S$, on pose $\lambda =< e_s, e_t >$. On a $\rho(st)(e_s) = s(e_s - 2 < e_s, e_t > e_t) = e_s - 2\lambda e_t - 2 < e_s - 2\lambda e_t, e_s > e_s = e_s - 2\lambda e_t - 2e_s + 4\lambda^2 e_s = (4\lambda^2 - 1)e_s - \lambda e_t$. On trouve aussi $\rho(st)(e_t) = 2\lambda e_s - e_t$.
Ainsi si $m_{s,t} = +\infty$ alors $\lambda = -1$. Comme $\rho(st)(e_s + e_t) = e_s + e_t$ et $\rho(st)(e_s) = 2(e_s + e_t) + e_s$ alors $\rho(st)^m(e_s) = 2m(e_s + e_t) + e_s$. Donc $\rho(st)$ est d'ordre infini.
Sinon on identifie dans $\mathbb{C}$, e_s à 1 et e_t à $-\exp^{-i\theta}$ où $\theta = \frac{\Pi}{m_{s,t}}$. Ainsi $< .,. >$ devient le produit scalaire usuel et on a $< e_s, e_t >= -\cos(\theta)$. Ainsi $\rho(st)(e_s) = (4\cos^2(\theta) - 1) - 2\cos(\theta)\exp^{-i\theta} = 3\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) - 2\cos^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta) = \exp^{2i\theta}$ et $\rho(st)(e_t) = -2\cos(\theta) + \exp^{-i\theta} = -\exp^{i\theta}$. Donc st agit comme une rotation d'angle $\frac{\Pi}{m_{s,t}}$ et donc l'ordre de st est bien $m_{s,t}$. □

Nous allons vouloir montrer maintenant que cette représentation est fidèle.

Définition 1.4. Soit ρ une représentation d'un groupe G. On appelle **représentation contragrédiente** ρ^* la représentation de G définie par : pour tout $g \in G$, $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})$.

Définition 1.5. On note $C_I = \{x^* \in V^* \mid x^*(e_s) > 0 \forall s \in I\}$. On note aussi $C = C_S$ on l'appelle **chambre fondamentale**.
On peux définir les autres chambres à à partir de la chambre fondamentale par translation, ce sont les wC pour tout $w \in W$.

Définition 1.6. Le **cône de Tits** est définit comme $\bigcup_{w\in W} w\overline{C}$.

Soient $w \in W$ et $I \subset S$ tel que $|I| \leq 2$, on note $\alpha_I(w)$ l'élément de W_I de longueur maximale tel que $\ell(\alpha_I(w)) + \ell(\alpha_I(w)^{-1}w) = \ell(w)$.

Lemme 1.6. *On a $w(C) \subset \alpha_I(w)C_I$.*

Démonstration. On prouve ce lemme par récurrence sur $\ell(w)$. L'initialisation est claire car si $\ell(w) = 0$ alors $w = 1_W$ et donc on a bien $wC = C \subset C_I$.
Supposons $\ell(w) > 0$ et l'assertion vraie pour tout $w' \in W$ tel que $\ell(w') < \ell(w)$. Il faut distinguer deux cas pour I.
Si $I = \{s\}$ alors $\alpha_I(w) \in \{1, s\}$. Si $\alpha_I(w) = s$ alors $w = sw'$ avec $\ell(w') < \ell(w)$ et $\alpha_I(w') = 1$. D'où par hypothèse de récurrence $wC = sw'C \subset sC_{\{s\}}$.
Si $\alpha_I(w) = 1$ alors comme $w \neq 1_W$ il existe s' tel que $\alpha_{\{s'\}}(w) = s'$. On note alors $w = \alpha_{\{s,s'\}}(w)w'$ on a $\alpha_{\{s,s'\}}(w) \neq 1$, $\alpha_{\{s,s'\}}(w') = 1$ et $\ell(w') < \ell(w)$. Ainsi par hypothèse de récurrence on a $wC = \alpha_{\{s,s'\}}(w)w'C \subset \alpha_{\{s,s'\}}(w)C_{\{s,s'\}}$. On pose $x = \alpha_{\{s,s'\}}(w)$. Comme on a $C_{\{s,s'\}} = C_{\{s\}} \cap C_{\{s'\}} \subset C_{\{s\}}$ il suffit de montrer que $xC_{\{s,s'\}} \subset C_{\{s\}}$ c'est-à-dire comme $C_{\{s,s'\}} = C_{\{s\}} \cap C_{\{s'\}} \subset C_{\{s\}}$ qu'il suffit de montrer que $x(e_s) > 0$. Soit P le sous-espace de V engendré par e_s et $e_{s'}$. On note e_s^* et $e_{s'}^*$ la base duale de $\{e_s, e_{s'}\}$. On remarque que x possède une expression réduite commençant par s' car comme $\alpha_{\{s'\}}(w) = s'$ et $\alpha_{\{s\}}(w) = 1$ on a $\alpha_{\{s,s'\}}(x) = s'$.
Supposons $m_{s,s'} = +\infty$. Pour l'application contragrédiente on a $s(e_s^*) = e_s^* + 2(e_{s'}^* - e_s^*)$ et $s(e_{s'}^*) = e_{s'}^*$, respectivement on a $s'(e_{s'}^*) = e_{s'}^* + 2(e_s^* - e_{s'}^*)$ et $s(e_s^*) = e_s^*$. Ainsi s (respectivement s') préserve la droite passant par e_s^* et $e_{s'}^*$ et agit sur cette droite comme la réflexion par rapport à $e_{s'}^*$ (respectivement e_s^*). Il est clair que l'intersection de $C_{\{s,s'\}}$ avec cette droite est $J = [e_s^*, e_{s'}^*]$. Comme x possède une expression réduite commençant par s' alors on a l'image de J par x qui est du même côté que e_s^* par rapport à $e_{s'}^*$ et donc que $x(e_s) > 0$.

$$\begin{array}{cccccccccc} & & s'I & & I & & sI & & ss'I & \\ \ldots\bullet & \text{———} & \bullet & \text{———} & \bullet & \text{———} & \bullet & \text{———} & \bullet\ldots & \\ & & & e_s^* & & e_{s'}^* & & & & \end{array}$$

Si $m_{s,s'} < +\infty$ le dessin obtenu est un cercle et où l'arc de cercle J est diamétralement opposé à $\Delta_{s,s'}J$. La conclusion reste la même.
Le cas $I = \{s, t\}$, $s \neq t$ se déduit facilement du premier cas.

□

Lemme 1.7. *Soit $w \in W$. Si $w \neq 1_W$ alors $w(C) \cap C = \emptyset$.*

Démonstration. Comme $w \neq 1_W$ alors il existe $s \in S$ tel que $w = sw'$ avec $\ell(w') = \ell(w) - 1$ et ainsi $\ell(s) + \ell(sw) = 1 + \ell(w) - 1 = \ell(w)$. Ainsi $\alpha_{\{s\}} = s$. D'où par le lemme 1.6 on a $wC \subset sC_{\{s\}} = -C_{\{s\}}$. Or il est clair que $-C_{\{s\}} \cap C = \emptyset$. Donc $w(C) \cap C = \emptyset$. □

Théorème 1.8. *La représentation naturelle ρ est fidèle.*

Démonstration. Par l'absurde si ρ n'est pas injective. Il existe $w \in W$ tel que $w \neq 1_W$ et w agit comme 1_W. Donc $wC = C$, ce qui est absurde par le lemme 1.7. □

2 Fonctions polynomiales

2.1 Lien entre polynômes et fonctions polynomiales

Afin de simplifier les notions nécessaires nous supposerons que le corps k des scalaires est infini. Cela permet de ne pas introduire de la géométrie algébrique et d'avoir un isomorphisme entre les polynômes en n variable avec les fonctions polynomiales de k^n dans k.

Définition 2.1. Une **fonction polynomiale** d'un corps G dans k est une application g telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in k$ tels que pour tout $x \in G$ on a $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

Proposition 2.1. *Soit k un corps infini. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble des polynômes en n variable est isomorphe à celui des fonctions polynomiales de k^n dans k*

Démonstration.
Par récurrence sur n on montre que $\left\{ \begin{array}{ccc} k[X_1, \ldots, X_n] & \to & \{\textit{fonctions polynomiales } k^n \to k\} \\ f & \mapsto & (a_1, \ldots, a_n) \mapsto f(a_1, \ldots, a_n) \end{array} \right.$
est un isomorphisme.

Par définition, on constate que pour tout $n \in \mathbb{N}$ cette application est bien linéaire et surjective. Concernant l'injectivité, il suffit donc de montrer que le noyau est réduit à 0. Procédons d'abord à l'initialisation. Soit $P \in k[X_1]$ tel que pour tout $x \in k$, $P(x) = 0$. Alors P est un polynôme à une variable avec une infinité de racine, donc $P = 0$.

Maintenant nous continuons avec l'hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'assertion vraie jusqu'au rang n. Soit $P \in k[X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}]$. On l'écrit $P = \sum\limits_{i \geq 0} f_i(X_1, \ldots, X_n) X_{n+1}^i$ avec $f_i(X_1, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]$. C'est une somme finie car P est un polynôme donc il possède un degré maximal. Supposons que pour tout $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in k^{n+1}$, on a $P(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0$. On peux voir P dans $(k[X_1, \ldots, X_n])[X_{n+1}]$. On a pour tout $(x_1, \ldots x_n) \in k^n$, $P(x_1, \ldots, x_n, X_{n+1}) \in k[X_{n+1}]$ et ce polynôme en une variable possède une infinité de racines, il est donc nul. On en déduit que pour tout $(x_1, \ldots x_n) \in k^n$ et pour tout i on a $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Par hypothèse de récurrence sur les f_i on obtient que pour tout i, $f_i = 0$ et donc $P = 0$. □

Remarque 1. Ainsi si $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que f s'annule sur un hyperplan, comme par exemple $\{(a, b_2, \ldots, b_n) \mid (a, b_2, \ldots, b_n) \in k^n,\ a \neq 0\}$, alors $f = 0$

2.2 Fonctions polynomiales sur des graphes

Soit (W, S) un système de Coxeter. Soit V un espace vectoriel de dimension finie qui est une représentation de W.

Définition 2.2. On note pour tout $x \in W$ le **graphe renversée de** x l'ensemble suivant :

$$Gr(x) = \{(x\lambda, \lambda \mid \lambda \in V\} \subset V \times V$$

. On donne aussi la notation suivante pour tout $A \subset W$, $Gr(A) = \bigcup\limits_{x \in A} Gr(x)$.

Pour tout $x \in W$ on note $V^x = \{u \in V | xu = u\}$ et $V^{-x} = \{u \in V | xu = -u\}$.

Lemme 2.2. *Pour tous $y, z \in W$ on a $Gr(y) \cap Gr(z) \cong V^{yz^{-1}}$. L'isomorphisme peut se voir avec la projection sur la première coordonnée.*
De plus on a l'égalité suivante : $(Gr(y) + Gr(z)) \cap (V \times \{0\}) = Im(yz^{-1} - id) \times \{0\}$.

Démonstration. On note π la projection sur la première coordonnée, c'est une application linéaire.
On montre d'abord qu'elle est surjective. Soit $\alpha \in V^{yz^{-1}}$. On obtient $yz^{-1}\alpha = \alpha$. On en déduit que $(\alpha, z^{-1}\alpha) = (yz^{-1}\alpha, z^{-1}\alpha) \in Gr(y)$ et que $(\alpha, z^{-1}\alpha) = (zz^{-1}\alpha, z^{-1}\alpha) \in Gr(z)$. D'où $(\alpha, z^{-1}\alpha) \in Gr(y) \cap Gr(z)$ et on a $\pi((\alpha, z^{-1}\alpha)) = \alpha$.
Pour montrer que la projection est injective, on montre que le noyau est restreint à $\{0\}$. Soit $u = (y\lambda, \lambda) \in Gr(y) \cap Gr(z)$ tel que $y\lambda = 0$. Or comme $y \in W$ alors $y\lambda = 0$ nous donne $\lambda = 0$. Ainsi $u = 0$.

On montre maintenant le deuxième point.
On commence par l'inclusion de droite à gauche. Soit $(yz^{-1}\lambda - \lambda, 0) \in Im(yz^{-1} - id) \times \{0\}$ on a clairement $(yz^{-1}\lambda - \lambda, 0) \in V \times 0$. De plus $(yz^{-1}\lambda - \lambda, 0) = (yz^{-1}\lambda, z^{-1}\lambda) - (zz^{-1}\lambda, z^{-1}\lambda) \in Gr(y) + Gr(z)$.
On continue avec l'inclusion de gauche à droite. Soit $x \in (Gr(y) + Gr(z)) \cap (V \times \{0\})$. Donc il existe $\lambda,\ \mu,\ \alpha \in V$ tels que $x = (y\lambda + z\mu, \lambda + \mu) = (\alpha, 0)$. Ainsi $\lambda = -\mu$, d'où $x = ((y-z)\lambda, 0) = (yz^{-1}(z\lambda) - z\lambda, 0) \in Im(yz^{-1} - id) \times \{0\}$. □

Soit k un corps infini. On note R la k-algèbre des fonctions polynomiales sur V. On note pour tout $s \in S$, R^s le sous-anneau de R des éléments s-invariant. On utilise l'abréviation $\otimes_k = \otimes$. On identifie $R \otimes R$ avec les fonctions polynomiales sur $V \times V$ par la formule $(f \otimes g)(\lambda, \mu) = f(\lambda)g(\mu)$. Les fonctions polynomiales sur $Gr(A)$ sont les fonctions polynomiales qui s'annulent sur $Gr(A)$. Elles se voient naturellement comme le quotient de $R \otimes R$ par $I(A) = \{f \in R \otimes R \mid f \text{ s'annule sur } Gr(A)\}$. On note ce R-bimodule $\mathbb{Z}$-gradué :

$$R(A) = R(Gr(A))$$

Dans le cas particulier où $A = \{y \mid y \leq x\}$ on note $R(A) = R(\leq x)$. On note pour tout $y \in W,\ \lambda \in V,\ r \in R,\ r^y(\lambda) = r(y\lambda)$, on définit ainsi une action à droite de W sur R.
On note $1_y \in R(y)$ la fonction constante égale à 1 sur $Gr(y)$. On a $r1_y = 1_y r^y$.
Il est clair que pour tout $x \in W$ on a $I(x) = < r \otimes 1 - 1 \otimes r^x,\ r \in R >$ et que $I(A) = \bigcap_{x \in A} I(x)$.

Remarque 2. Pour tout $y \in W$ on peux identifier $R(y)$ à R.

Démonstration. En effet comme $I(y) = < r \otimes 1 - 1 \otimes r^y,\ r \in R >$ alors dans $R(y)$ on pour tout $r \in R$, $r \otimes 1 = 1 \otimes r^y$. Ainsi pour tout $f, g \in R$ on a $f \otimes g = 1 \otimes f^y g$ dans $R(y)$. Donc l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} R(y) & \to & R \\ f \otimes g & \mapsto & f^y g \end{array} \right.$ nous permet d'identifier $R(y)$ avec R. C'est clairement surjectif et linéaire.
De plus si $f^y g = 0$ il suffit de voir f et g comme des polynômes et on obtient avec l'égalité des degrés que $f = 0$ et $g = 0$, d'où l'injectivité. □

Proposition 2.3. *Pour tous $x, y \in W$ on a $R(x) \otimes_R R(y) \cong R(xy)$.*

Démonstration. On remarque que pour tout $f \in R(x)$, $g \in R(y)$, on a $f \otimes g = f \otimes g1_y = f1_x g \otimes 1_y = fg^{x^{-1}} 1_x \otimes 1_y$
On pose donc l'application suivante $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} R(x) \otimes_R R(y) & \to & R(xy) \\ f \otimes g & \mapsto & fg^{x^{-1}} 1_{xy} \end{array} \right.$
Montrons que c'est un isomorphisme de R-bimodules. Cette application est clairement un morphisme surjectif. L'injectivité est clair aussi car si$fg^{x^{-1}} 1_{xy} = 0$ alors $fg^{x^{-1}} = 0$ et donc $f = 0$ et $g = 0$. En effet il suffit de les voir comme des polynômes et l'égalité des degrés nous donne la conclusion voulue.

□

Proposition 2.4. *Pour tout $s \in S$, $\alpha \in V^*$ tel que $ker(\alpha) = V^s$ il existe $e_1, \ldots, e_{n-1} \in V^s$ tels que $R^s = k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha^2]$.*

Démonstration. Soient $s \in S$, $\alpha \in V^*$ tel que $ker(\alpha) = V^s$. On montre d'abord que $(e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha)$ est une base de V^*. On a $V = V^s \oplus V^{-s}$. Soit $f \in V^{-s}$ tel que $\alpha(f) = 1$, cela est possible car sinon il suffit de prendre $\overline{f} = \dfrac{f}{\alpha(f)}$. On le complète en un base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, f)$ associée à $V = V^s \oplus V^{-s}$ et on note sa base dual $(e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, f^*)$. On a alors $(e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha)$ qui est une base de V^*. En effet on montre que cette famille est libre. Soient $a_1 \ldots . a_n \in k$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i^* + a_n \alpha = 0$. On évalue en f et on obtient $a_n = 0$ et on sait déjà que la famille $(e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*)$ est libre. Donc pour tout $i \in [|1, n|]$ on a $a_i = 0$. Donc la famille $(e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha)$ et libre et par un argument sur le cardinal on conclut que c'est une base.
Donc $R = k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha]$.
Il est clair que pour tout $i \in [|1 \ldots . n-1|]$, $e_i^* \in R^s$. De plus $s.\alpha = -\alpha$ ainsi $s.\alpha^2 = \alpha^2$, d'où $\alpha^2 \in R^s$. On a donc montrer l'inclusion de $k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha^2]$ dans R^s.
Pour l'autre inclusion on prend $u \in R^s$, comme $u \in R = k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha]$ alors il existe un nombre fini de i ainsi que des $P_i \in k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*]$ tels que $u = \sum_i P_i \alpha^i$. On calcul $u - s.u = 2 \sum_{i\ impair} P_i \alpha^i$. De plus comme $u \in R^s$, on a $u - s.u = 0$. Ainsi comme dans la preuve de la proposition 2.1 on obtient que tout les P_i pour i impair sont nuls. D'où $u \in k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha^2]$.
Ainsi $R^s = k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha^2]$. □

Proposition 2.5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie tel que :*
$E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$ avec $dim(E_2) = dim(E_3) = 1$.
Alors il existe une suite exacte $R(E_1 \oplus E_3)[-2] \hookrightarrow R((E_1 \oplus E_2) \cup (E_1 \oplus E_3)) \twoheadrightarrow R(E_1 \oplus E_2)$.

Démonstration. Soit E un espace vectoriel de dimension finie tel que :
$E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$ avec $dim(E_2) = dim(E_3) = 1$.
Choisissons des bases : $(f_1, \ldots, f_n)$ pour E_1^*, ϕ pour E_2^*, ξ pour E_3^* et $g_1, \ldots, g_p$ pour E_4^*. On note $B = k[f_1, \ldots, f_n, \phi, \xi, g_1, \ldots, g_p]$. On a alors :
. $I(E_1 \oplus E_2) = \bigoplus f_1^{a_1} \ldots . f_n^{a_n} \phi^u \xi^v g_1^{b_1} \ldots . g_p^{b_p}$ avec $a_i, b_i, u, v \in \mathbb{N}$ et $\underline{v + \sum b_i > 0}$. C'est-à-dire : $I(E_1 \oplus E_2) = \xi B + \sum g_i B$.
. $I(E_1 \oplus E_3) = \bigoplus f_1^{a_1} \ldots . f_n^{a_n} \phi^u \xi^v g_1^{b_1} \ldots . g_p^{b_p}$ avec $a_i, b_i, u, v \in \mathbb{N}$ et $\underline{u + \sum b_i > 0}$. C'est-à-dire : $I(E_1 \oplus E_3) = \phi B + \sum g_i B$.

D'où $I((E_1 \oplus E_2) \cup (E_1 \oplus E_3)) = \bigoplus f_1^{a_1} \ldots . f_n^{a_n} \phi^u \xi^v g_1^{b_1} \ldots . g_p^{b_p}$ avec $a_i, b_i, u, v \in \mathbb{N}$ et $\underline{u + \sum b_i > 0}$ et $\underline{v + \sum b_i > 0}$. C'est-à-dire : $I((E_1 \oplus E_2) \cup (E_1 \oplus E_3)) = \phi \xi B + \sum g_i B$.

On passe maintenant dans le monde des polynômes, on a :

$$R(E_1 \oplus E_2) = \frac{B}{I(E_1 \oplus E_2)} \simeq k[f_1, \ldots, f_n, \phi]$$

$$R(E_1 \oplus E_3) = \frac{B}{I(E_1 \oplus E_3)} \simeq k[f_1, \ldots, f_n, \xi]$$

$$R((E_1 \oplus E_2) \cup (E_1 \oplus E_3)) = \frac{B}{I((E_1 \oplus E_2) \cup (E_1 \oplus E_3))} \simeq \frac{k[f_1, \ldots, f_n, \phi, \xi]}{(\phi\xi)}$$

On pose :

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} R(E_1 \oplus E_3)[-2] & \to & R((E_1 \oplus E_2) \cup (E_1 \oplus E_3)) \\ P & \mapsto & \xi P \end{array} \right.$$

$$\nu : \begin{cases} R((E_1 \oplus E_2) \cup (E_1 \oplus E_3)) & \to & R(E_1 \oplus E_2) \\ Q & \mapsto & Q|_{\xi=0} \end{cases}$$

De par ce qu'on vient d'énoncer on a Γ injective et ν surjective. On remarque facilement que $Im(\Gamma) = Ker(\nu)$. On obtient bien une suite exacte. □

Nous allons montrer maintenant un lemme qui nous servira dans la partie sur les groupes diédraux.

Lemme 2.6. *Pour tout $s \in S$, on a $R(1,s) \cong R \otimes_{R^s} R$.*

Démonstration. On rappelle que $R(1,s) = \dfrac{R \otimes R}{I(1,s)}$, et que $R \otimes_{R^s} R = \dfrac{R \otimes R}{< r \otimes 1 - 1 \otimes r,\ r \in R^s >}$.

On remarque facilement que $< r \otimes 1 - 1 \otimes r,\ r \in R^s > \subset I(1,s)$. D'où il existe un morphisme surjectif : $R \otimes_{R^s} R \twoheadrightarrow R(1,s)$.
Pour montrer l'isomorphisme, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la graduation n de $R(1,s)$ a la même dimension que celle de $R \otimes_{R^s} R$. On aura alors l'isomorphisme au niveau de chaque graduation et donc l'isomorphisme entre les deux espaces.

On traite d'abord le cas $R \otimes_{R^s} R$.
Soit $\alpha \in V^*$ tel que $Ker(\alpha) = V^s$. Par la proposition 2.4 on a l'existence de $e_1, \ldots, e_{n-1} \in V^s$ tels que $R^s = k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha^2]$. Ainsi on obtient $R = k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha] = k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha^2] \oplus \alpha k[e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, \alpha^2] = R^s \oplus \alpha R^s$. On en déduit : $R \otimes_{R^s} R = R \otimes_{R^s} (R^s \oplus \alpha R^s) = (R \otimes 1) \oplus (R \otimes \alpha)$. Comme $R \otimes 1 \cong R$ et $R \otimes \alpha \cong R[-2]$ alors la dimension de la graduation n pour $R \otimes_{R^s} R$ est $degre(R_n) + degre(R_{n-2})$.

On passe maintenant au cas $R(1,s)$.
On va construire une suite exacte $R(s)[-2] \hookrightarrow R(1,s) \twoheadrightarrow R(1)$. La surjection est la surjection naturelle car $I(1,s) \subset I(1)$. On remarque que $V \times V = \Delta V \oplus \overline{\Delta} V$, où $\Delta V = \{(v,v),\ v \in V\}$ et $\overline{\Delta} V = \{(v,-v),\ v \in V\}$. D'où $V \times V = \Delta V^s \oplus \Delta V^{-s} \oplus \overline{\Delta} V^{-s} \oplus \overline{\Delta} V^s$. On a $dim(\Delta V^{-s}) = dim(\overline{\Delta} V^{-s}) = 1$.
Il est clair que $Gr(1) = \Delta V = \Delta V^s \oplus \Delta V^{-s}$ et que $Gr(s) = \Delta V^s \oplus \overline{\Delta} V^{-s}$.
On utilise alors la proposition 2.5 avec $E = V \times V = \Delta V^s \oplus \Delta V^{-s} \oplus \overline{\Delta} V^{-s} \oplus \overline{\Delta} V^s$. On obtient une suite exacte $R(Gr(s))[-2] \hookrightarrow R(Gr(1) \cup Gr(s)) \twoheadrightarrow R(Gr(1))$. c'est à dire une suite exacte $R(s)[-2] \hookrightarrow R(1,s) \twoheadrightarrow R(1)$.
On en déduit que la dimension de la graduation n de $R(1,s)$ est : $degre((R_e)_n) + degre((R_s[-2])_n) = degre(R_n) + degre(R_{n-2})$.

Ce qui conclut la preuve du lemme.

□

3 Réalisation des algèbres de Hecke par les bimodules

3.1 Construction de l'algèbre de Hecke

Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive. On note $< \mathcal{A} >$ le quotient du groupe abélien libre engendré par les objets de $\mathcal{A}$ modulo les relations $< M >=< M' > + < M" >$ si $M \simeq M' \oplus M"$ pour tous objets $M, M', M"$ de $\mathcal{A}$.

Définition 3.1.
A est une **algèbre $\mathbb{Z}$-graduée** s'il existe une famille de sous-espaces vectoriels $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que :
$A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$
$\forall i, j \in \mathbb{Z}, A_i A_j \subset A_{i+j}$

Pour A une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée, On note $A - mod_{\mathbb{Z}}^f$ la catégorie des $\mathcal{A}$-modules $\mathbb{Z}$-gradués de type fini sur $\mathcal{A}$. On écrira aussi $M[n]$ pour l'objet M avec sa $\mathbb{Z}$-graduation décalée de n : $(M[n])_i = M_{i+n}$.

Soit (W, S) un système de Coxeter avec $|S| < +\infty$. Soit $l : W \to \mathbb{N}$ la fonction longueur. On note e l'élément neutre de W.
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des éléments de W qui sont conjugués à un élément de S.

Définition 3.2.
On définit la relation $\to$ tel que pour tous $u, v \in W$, $u \to v$ si et seulement si il existe $t \in \mathcal{T}$ tel que $v = ut$ et $\ell(u) < \ell(v)$.
On définit alors **l'ordre de Bruhat** sur W :
Pour $u, v \in W$, $u \le v$ si et seulement si, il existe une chaîne $u = u_0 \to u_1 \ldots. \to u_k = v$.

Nous avons besoin d'un résultat sur les algèbres associatives adapté à notre cas. La démonstration du théorème plus général peut se trouver dans [HUMP]

Théorème 3.1. *Soit (W, S) un système de Coxeter, B un anneau commutatif unitaire et $a, b \in B$. On prend $\mathcal{H}$ un B-module libre sur l'ensemble W où l'on note $(T_w)_{w\in W}$ une base.
Il existe une unique structure de B-algèbre associative sur $\mathcal{H}$, où T_e est un élément neutre, et telle que les conditions suivantes sont vraies pour tout s dans S et x, y dans W :*
$T_x T_y = T_{xy}$ *si* $\ell(x) + \ell(y) = \ell(xy)$
$T_s^2 = aT_s + bT_e$

Définition 3.3. En prenant dans le théorème précédent $B = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, $a = v^{-2} - 1$, $b = v^{-2}$, on obtient $\mathcal{H} = \bigoplus_{x\in W} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]T_x$ que l'on appelle **l'algèbre de Hecke sur** (W, S).
Les relations sont :
$T_x T_y = T_{xy}$ si $\ell(x) + \ell(y) = \ell(xy)$
$T_s^2 = v^{-2}T_e + (v^{-2} - 1)T_s$

Lemme 3.2. *L'algèbre de Hecke peux aussi être définie par une présentation comme étant la $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-algèbre associative unitaire de générateurs $\{T_s\}_{s\in S}$ et par la relation quadratique $T_s^2 = v^{-2}T_e + (v^{-2} - 1)T_s$ ainsi que les relations de tresses $T_sT_t \ldots .T_s = T_tT_s \ldots .T_t$ avec un nombre j impair de termes (respectivement $T_sT_t \ldots .T_t = T_tT_s \ldots .T_s$ avec un nombre j pair de termes) si $st \ldots .s = ts \ldots .t$ (respectivement $st \ldots .t = ts \ldots .s$) pour tous $s, t \in S$.*

Démonstration. On note $\mathcal{H}'$ la $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$-algèbre définit par les générateurs $\{T'_s\}_{s\in S}$ avec la relations $T'^2_s = v^{-2}T'_e + (v^{-2}-1)T'_s$ et les relations de tresses. On pose $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}' & \rightarrow & \mathcal{H} \\ T's & \mapsto & T_s \end{array} \right.$. C'est un morphisme surjectif car $\mathcal{H}$ est engendré par les T_s comme algèbre.

On cherche à construire une application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$.

On regarde $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \rightarrow & \mathcal{H}' \\ s & \mapsto & T'_s \end{array} \right.$. Cela s'étend en une application ϕ de S^* dans $\mathcal{H}'$. Comme les relations de tresses sont vérifiées dans $\mathcal{H}'$ alors on a bien $f(\Delta_{s,s'}) = f(\Delta_{s',s})$ pour tous $s, s' \in S$. Par le lemme de Matsumoto cette application peux encore s'étendre en une application ϕ : $\left\{ \begin{array}{ccc} W & \rightarrow & \mathcal{H}' \\ w = s_1 \dots s_k & \mapsto & T'_{s_1} \dots T'_{s_k} := T'_w \end{array} \right.$. où $s_1 \dots s_k$ est une expression réduite de w. On définit le morphisme de $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$-module $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \rightarrow & \mathcal{H}' \\ T_w & \mapsto & T'_w \end{array} \right.$. Pour vérifier que c'est un morphisme d'algèbre il suffit donc de vérifier que pour tous $x, y \in W$, $f(T_xT_y) = f(T_x)f(T_y)$, et comme S engendre W il suffit de le vérifier pour $x = s \in S$.

Si $\ell(sy) > \ell(y)$ alors en notant $s_1 \dots s_k$ une expression réduite de y on a $ss_1 \dots s_k$ qui est une expression réduite de sy. D'où $T_sT_y = T_{sy}$ et $T'_sT'_y = T'_{sy}$ ainsi $f(T_sT_y) = f(T_{sy}) = T'_{sy} = T'_sT'_y = f(T_s)f(T_y)$.

Si $\ell(sy) < \ell(y)$ alors en notant $t_1 \dots t_k$ une expression réduite de sy on a $st_1 \dots t_k$ qui est une expression réduite de y. D'où $T_sT_{sy} = T_y$ et $T'_sT'_{sy} = T'_y$, donc on a $T_sT_y = v^{-2}T_{sy} + (v^{-2}-1)T_y$ et de même $T'_sT'_y = v^{-2}T'_{sy} + (v^{-2}-1)T'_y$. Ainsi $f(T_sT_y) = f(v^{-2}T_{sy} + (v^{-2}-1)T_y) = v^{-2}f(T_{sy}) + (v^{-2}-1)f(T_y) = v^{-2}T'_{sy} + (v^{-2}-1)T'_y = T'_sT'_y = f(T_s)f(T_y)$.

Il est clair que $f \circ g = id_{\mathcal{H}'}$ et $g \circ f = id_{\mathcal{H}}$. Ainsi on a bien un isomorphisme d'algèbre entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$. □

3.2 Différentes notions de représentations

Définition 3.4. Une **représentation réflexion fidèle** pour un système de Coxeter (W, S) est une représentation $\rho : W \rightarrow GL(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k de caractéristique différente de 2 telle que ρ est injective et où pour tout $x \in W$ on a $dim(V/V^x) = 1$ si et seulement si $x \in \mathcal{T}$

Définition 3.5. Une représentation ρ de W telle que les éléments de W agissent comme des réflexions, c'est-à-dire $\rho(w)$ est une réflexion de V on a alors que $\rho(w)$ a un (-1)-espace propre de dimension 1 et un hyperplan stable, et où les différentes réflexions ont des (-1)-espaces propres différents est appelée **représentation réflexion vecteur fidèle**

Pour k un corps infini, on note comme auparavant R la k-algèbre de toutes les fonctions polynomiales sur V. On munit R de la $\mathbb{Z}$-graduation suivante $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ telle que $R_2 = V^*$ et $R_i = 0$ pour tout i impair. Pour tout $s \in S$ on note $R^s \subset R$ le sous-anneau de tous les éléments s-invariants. On note $\mathcal{R}$ la catégorie de tous les R-bimodules $\mathbb{Z}$-gradués de type fini à droite et à gauche.

Proposition 3.3. *Ainsi* $(<\mathcal{R}>, \oplus, \otimes_R)$ *est un anneau.*

Démonstration. On a déjà que $(<\mathcal{R}>, \oplus)$ est un groupe abélien. Il est clair que $\otimes_R$ est associative. Montrons la distributivité, soient G, H, K des R-bimodules $\mathbb{Z}$-gradués de type fini à droite et à gauche. On a pour tout $g \in G$, $h \in H$, $k \in K$, $(g + h) \otimes_R k = g \otimes_R k + h \otimes_R k \in G \otimes_R K \oplus H \otimes_R K$. Donc $(G \oplus H) \otimes_R K \subset G \otimes_R K \oplus H \otimes_R K$. De plus on a pour tout $g \in G$, $h \in H$, $k_1, k_2 \in K$, $g \otimes_R k_1 + h \otimes_R k_2 = (g + h) \otimes_R k_1 + h \otimes_R (k_1 + k_2) \in (G \oplus H) \otimes_R$. D'où

$(G \oplus H) \otimes_R K = G \otimes_R K \oplus H \otimes_R K$.
On montre que $< R >$ est un élément neutre. En effet pour tout $G \in \mathcal{R}$, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de G, on a $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} G \otimes_R R & \to & G \\ g \otimes_R r & \mapsto & gr \end{array} \right.$ qui est un qui est un morphisme surjectif. Il est aussi injectif car si $gr = 0$, en écrivant $g = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i$ avec pour tout i, $r_i \in R$, on obtient que pour tout i, $r_i r = 0$. Donc en les voyant comme des polynômes on obtient par un argument sur les degrés que $r = 0$ et pour tout i, $r_i = 0$. D'où $g \otimes_R r = 0 \otimes_R 0$. Ainsi $G \otimes_R R \cong G$ et on montre de même que $R \otimes_R G \cong G$. Donc $< G > \otimes_R < R >=< R > \otimes_R < G >=< G >$.

□

3.3 Construction de la base de Kazhdan-Lusztig

On note $H_s = vT_s$. Par une preuve similaire à celle du le lemme 3.2, on remarque que l'algèbre de Hecke possède une autre présentation avec comme générateurs les $\{H_s\}_{s \in S}$ et comme relations $H_s^2 = 1 + (v^{-1} - v)H_s$ ainsi que $H_s H_t \ldots . H_s = H_t H_s \ldots . H_t$ avec un nombre j impair de termes (respectivement $H_s H_t \ldots . H_t = H_t H_s \ldots . H_s$ avec un nombre j pair de termes) si $st \ldots . s = ts \ldots . t$ (respectivement $st \ldots . t = ts \ldots . s$) pour tous $s, t \in S$.
On remarque alors que l'on a pour tout $s \in S$, $\;H_s^{-1} = H_s + v - v^{-1}$. En effet avec la première relation on a bien $H_s(H_s + v - v^{-1}) = 1$. On note pour tout $x \in W$, $\;H_x = v^{\ell(x)} T_x$. On a toujours la relation $H_x H_y = H_{xy}$ si $\ell(x) + \ell(y) = \ell(xy)$.

Il existe un morphisme d'anneau
$d : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ H & \mapsto & \overline{H} \end{array} \right.$ tel que $\overline{v} = v^{-1}$ et $\overline{H_x} = (H_{x^{-1}})^{-1}$.
En effet il suffit de vérifier que pour tout $y \in W$ et $s \in S$, $d(H_s H_y) = d(H_s) d(H_y)$.
On remarque que $H_s H_y = v^{1+\ell(y)} T_x T_y$. Donc en utilisant les relations dans la preuve du lemme 3.2 on obtient que si $\ell(sy) > \ell(y)$ alors on a $H_s H_y = v^{\ell(sy)} T_{sy} = H_{sy}$ et si $\ell(sy) < \ell(y)$ alors on a $H_s H_{sy} = v^{\ell(y)} T_y = H_y$ c'est-à-dire $H_s H_y = H_{sy} + (v^{-1} - v) H_s H_s y = H_{sy} + (v^{-1} - v) H_y$.
Si $\ell(sy) > \ell(y)$ alors on a $\ell(y^{-1}s) > \ell(y)$ et donc $d(H_s H_y) = d(H_{sy}) = (H_{y^{-1}s^{-1}})^{-1} = (H_{y^{-1}} H_s)^{-1} = d(H_y) d(H_s)$.
Si $\ell(sy) < \ell(y)$ alors on a $\ell(y^{-1}s) < \ell(y)$ et donc $d(H_s H_y) = d(H_{sy}) + d((v^{-1} - v) H_y) = (H_{(sy)^{-1}})^{-1} + (v^{-1} - v)^{-1})(H_{y^{-1}})^{-1} = (H_{y^{-1}s} + (v^{-1} - v) H_{y^{-1}})^{-1} = (H_{y^{-1}} H_s)^{-1} = d(H_y) d(H_s)$.
On vérifie aussi que d est bien une involution, en effet pour tout $x \in W$ on a $d(d(H_x)) = d((H_{x^{-1}})^{-1}) = (d(H_{x^{-1}}))^{-1} = H_x$.

Définition 3.6. On dit que $H \in \mathcal{H}$ est **auto-dual** si $\overline{H} = H$.

<u>*Remarque*</u> 3. En posant $C_s = v + H_s$ on a pour tout $x \in W$, $H_x C_s = \left\{ \begin{array}{ll} H_{xs} + v H_x & si\ xs > x \\ H_{xs} + v^{-1} H_x & si\ xs < x \end{array} \right.$

En effet, si $xs > x$ alors $\ell(xs) = \ell(x) + \ell(s)$, on en déduit la première équation.
Si $xs < x$ alors en posant $x_1 = xs$ on a $H_{x_1} H_s = H_x$ ainsi $H_x H_s = H_{x_1} H_s^2 = H_{x_1} + H_x(v^{-1} - v)$.
D'où $H_x C_s = H_{x_1} + v^{-1} H_x = H_{xs} + v^{-1} H_x$.
On remarque aussi que C_s est auto-dual : $\overline{C_s} = \overline{H_s} + v^{-1} = H_s + (v - v^{-1}) + v^{-1} = H_s + v = C_s$.

Proposition 3.4. *Pour tout $s \in S$ et $x, y \in W$ tels que $xs < x$ et $y < xs$ alors $ys < x$.*

Démonstration. Soit $y_1 \ldots . y_k$ une expression réduite de y. Comme $y < xs$ il existe $\alpha_1 \ldots . \alpha_n$ une expression réduite de xs tel que il existe $i_1 < \ldots . < i_k \in [|1, n|]$ tels que $\alpha_{i_j} = y_j$. De plus comme $xs < x$ alors $\alpha_1 \ldots . \alpha_n s$ est une expression réduit de x. Donc comme on retrouve bien ys dans cette expression réduite de x alors $ys < x$. □

Théorème 3.5. *Pour tout $x \in W$ il existe un unique élément $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ qui est auto-dual et tel que $\underline{H}_x \in H_x \ + \ \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v]H_y$*

Démonstration.

Montrons l'existence par récurrence sur l'ordre de Bruhat :
Pour l'initialisation il suffit de dire $\underline{H}_e = H_e = 1$.
Pour l'hérédité soit un $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in W$ tel que $\ell(x) = n$. Supposons que pour tout $y \in W$ tel que $y < x$ on a l'existence de $\underline{H}_y$ auto-dual avec $\underline{H}_y \in H_y \ + \ \sum_{z<y} v\mathbb{Z}[v]H_z$. Comme $x \neq e$ alors il existe $s \in S$ tel que $xs < x$. Ainsi par hypothèse de récurrence il existeH_{xs} auto-dual et des $h_y \in \mathbb{Z}[v]$ tels que $\underline{H}_{xs} = H_{xs} + \sum_{y<xs} vh_yH_y$.
On a $xs.s > xs$ d'où $\underline{H}_{xs}C_s = H_x + vH_{xs} + \sum_{y<xs} vh_yH_yC_s$.
Montrons que $\sum_{y<xs} vh_yH_yC_s \in \sum_{z<x} \mathbb{Z}[v]H_z$. On a déjà que vH_{xs} est dedans.
On a $\sum_{y<xs} vh_yH_yC_s = \sum_{\substack{y<xs\\ys>y}} vh_yH_yC_s + \sum_{\substack{y<xs\\ys<y}} vh_yH_yC_s = \sum_{\substack{y<xs\\ys>y}} vh_y(H_{ys} + vH_y) + \sum_{\substack{y<xs\\ys<y}} vh_y(H_{ys} + v^{-1}H_y)$
$= \sum_{y<xs} vh_yH_{ys} + \sum_{\substack{y<xs\\ys>y}} v^2h_yH_y + \sum_{\substack{y<xs\\ys<y}} h_yH_y$.
Or il est clair que si $xs < x$ alors pour tout $y < xs$ on a $y < x$. De plus si $y < xs$ alors par la propriété 3.4 on obtient $ys < x$. Ainsi on a bien vérifié que $\sum_{y<xs} vh_yH_yC_s \in \sum_{z<x} \mathbb{Z}[v]H_z$. Il ne reste plus qu'à enlever tout les termes constants possibles avec un terme auto-dual. D'où on pose :
$\underline{H}_x = \underline{H}_{xs}C_s \ - \ \sum_{\substack{y<xs\\ys<y}} h_y(0)\underline{H_y}$
En utilisant l'hypothèse de récurrence sur ces $\underline{H_y}$ On a bien $\sum_{y<xs} vh_yH_{ys} + \sum_{\substack{y<xs\\ys>y}} v^2h_yH_y + \sum_{\substack{y<xs\\ys<y}} h_yH_y \ - \ \sum_{\substack{y<xs\\ys<y}} h_y(0)\underline{H_y} \in \sum_{z<x} v\mathbb{Z}[v]H_z$. Donc $\underline{H}_x \in H_x + \sum_{z<x} v\mathbb{Z}[v]H_z$.
De plus on a bien $\underline{H}_x$ auto-dual.

Montrons maintenant l'unicité.
On montre d'abord que pour tout $x \in W$, on a $\overline{H_x} \in H_x + \sum_{y<x} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]H_y$.
On le montre par récurrence sur l'ordre de Bruhat. L'initialisation est claire car $\overline{H_e} = H_e$.
Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in W$. On suppose l'assertion vraie pour tout $y < x$. Par la preuve de l'existence on a que $H_x \in \underline{H}_x + \sum_{y<x} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]H_y$.
Donc $\overline{H_x} \in \underline{H}_x + \sum_{y<x} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]\overline{H_y}$. Encore une fois par la preuve de l'existence et par l'hypothèse de récurrence, on obtient que $\overline{H_x} \in H_x + \sum_{y<x} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]H_y + \sum_{y<x} \mathbb{Z}[v, v^{-1}](H_y + \sum_{z<y} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]H_z)$.
Ainsi on a bien $\overline{H_x} \in H_x + \sum_{y<x} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]H_x$.

Pour montrer l'unicité il suffit de vérifier que pour tout $H \in \sum_{y} v\mathbb{Z}[v]H_y$, $[H = \overline{H}] \Rightarrow [H = 0]$.
Soit $H = \sum_{y} h_yH_y$ avec $h_y \in v\mathbb{Z}[v]$ tel que $H = \overline{H}$ et $H \neq 0$. Il existe z maximal tel que $h_z \neq 0$. On a $H = h_zH_z + \sum_{\substack{y \neq z\\l(y) \leq l(z)}} h_yH_y$. Ainsi $\overline{H} = \overline{h_zH_z} + \sum_{\substack{y \neq z\\l(y) \leq l(z)}} \overline{h_yH_y}$. Pour tout $y \neq z$, $l(y) \leq l(z)$ il existe $q_y \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ tels que $\overline{H} = \overline{h_z}H_z + \sum_{\substack{y \neq z\\l(y) \leq l(z)}} q_yH_y$. Ainsi comme $H - \overline{H} =$

$(h_z - \overline{h_z})H_z + \sum\limits_{\substack{y \neq z \\ l(y) \leq l(z)}} (h_y - q_y)H_y = 0$, alors $h_z = \overline{h_z}$ car les $\{H_x\}_{x \in W}$ forment une base de $\mathcal{H}$ vu comme $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-module. Or cela est impossible car $h_z \in v\mathbb{Z}[v]$. □

Définition 3.7. On appelle les $\underline{H}_x$ la **base de Kazhdan-Lusztig** de $\mathcal{H}$. Elle correspond à une base pour $\mathcal{H}$ vu comme $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-module.

4 Le cas des groupes diédraux

Le but de cette partie est d'exhiber, dans le cadre des groupes diédraux, l'application prouvant le théorème fondamental de Soergel que l'on rappelle ici. Pour $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive on note toujours $< \mathcal{A} >$ le quotient du groupe abélien libre engendré par les objets de $\mathcal{A}$ modulo les relations $< M > = < M' > + < M" >$ si $M \simeq M' \oplus M"$ pour tous objets $M, M', M"$ de $\mathcal{A}$.

Théorème. *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit V une représentation réflexion vecteur fidèle de W sur un corps infini. Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke de (W, S), R l'anneau des fonctions polynomiales sur V et $\mathcal{R}$ la catégorie de tous les R-bimodules $\mathbb{Z}$-gradués de type fini à droite et à gauche.*
Il existe un unique morphisme d'anneau

$$\epsilon : \mathcal{H} \to < \mathcal{R} >$$

tel que $\epsilon(v) = < R[1] >$ et $\epsilon(T_s + 1) = < R \otimes_{R^s} R >$ pour tout $s \in S$.

4.1 Préliminaires

Soit (W, S) un groupe diédral ($S = \{s, t\}$).

Remarque 4. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe que deux éléments de S^* possédant n termes : $st \dots s$ et $ts \dots t$ si n est impair et $st \dots t$ et $ts \dots s$ si n est pair. Si l'image dans W d'un des deux éléments est x alors on note l'image dans W de l'autre élément $\widehat{x}$. Il est clair que l'on a pour tout $x \in W$, $s\widehat{x} = \widehat{tx}$.

Proposition 4.1. *Soit $x \in W$, on note $A = \{y \in W \mid y \leq x\}$. On a :*
1) Si $x = e$ alors $A \cup sA = \{y \in W \mid y \leq s\}$ et $A \cap sA = \emptyset$.
2) Si $x = s$ alors $A = A \cup sA = A \cap sA$.
3) Si $x = t$ alors $A \cup sA = \{y \in W \mid y \leq st\}$ et $A \cap sA = \emptyset$
4) Si $\ell(x) \geq 2$
. Si x possède une expression réduite commençant par s, c'est-à-dire $x = sx_1$ avec $\ell(x_1) = \ell(x) - 1$, alors $A = A \cup sA = A \cap sA$. Ce cas comprend l'élément de taille maximal si W est fini.
. Sinon toutes les expressions réduites de x commencent par t, c'est-à-dire $x = tx_1$ avec $\ell(x_1) = \ell(x) - 1$, et dans ce cas $A \cup sA = \{y \in W \mid y \leq sx\}$ et $A \cap sA = \{y \in W \mid y \leq tx(= x_1)\}$.

Démonstration. Comme les cas $1, 2, 3$ sont faciles à traiter on ne prouvera que le cas 4.
Par récurrence sur n la longueur de x.
Pour l'initialisation on suppose $n = 2$.
. Si $x = st$ alors $A = \{e, s, t, st\} = sA$. D'où $A = A \cup sA = A \cap sA$.
. Si $x = ts$ alors $A = \{e, s, t, ts\}$ et donc $sA = \{e, s, st, sts\}$.
Ainsi $A \cup sA = \{e, s, t, st, ts, sts\} = \{y \in W \mid y \leq sx\}$.
et on a $A \cap sA = \{e, s\} = \{y \in W \mid y \leq s(= tx)\}$.

. Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $x \in W$ tel que $\ell(x) = n$.
. Si $x = sx_1$ avec $\ell(x_1) = \ell(x) - 1$ alors il est claire que toute expression réduite de x_1 commencent par t. On a $A = \{y \in W \mid y \leq x_1\} \cup \{\widehat{x_1}\} \cup \{x\}$. Donc $A \cup sA = \{y \in W \mid y \leq x_1\} \cup s\{y \in W \mid y \leq x_1\} \cup \{\widehat{x_1}, s\widehat{x_1}, x_1, x\}$. Par hypothèse de récurrence sur x_1 on obtient :
$A \cup sA = \{y \in W \mid y \leq sx_1(= x)\} \cup \{\widehat{x_1}, s\widehat{x_1}, x_1, x\} = \{y \in W \mid y \leq x\} = A$. D'où $A = A \cup sA$.
Pour ce qui est de $A \cap sA$, on a :

$A \cap sA = (\{y \in W \mid y \leq x_1\} \cup \{\widehat{x_1}\} \cup \{x\}) \cap (s\{y \in W \mid y \leq x_1\} \cup \{s\widehat{x_1}\} \cup \{sx(= x_1)\})$
$= (\{y \in W \mid y \leq x_1\} \cap s\{y \in W \mid y \leq x_1\}) \cup (\{y \in W \mid y \leq x_1\} \cap \{s\widehat{x_1}\}) \cup (\{y \in W \mid y \leq x_1\} \cap \{x_1\}) \cup$
$(\{\widehat{x_1}\} \cap s\{y \in W \mid y \leq x_1\}) \cup (\{x\} \cap s\{y \in W \mid y \leq x_1\}) = \{y \in W \mid y \leq tx_1\} \cup \{s\widehat{x_1}, x_1, \widehat{x_1}, x\}$
$= \{y \in W \mid y \leq x\} = A$

. Si $x = tsx_2$ avec $\ell(x_2) = \ell(x) - 2$ alors sx_2 possède une décomposition réduite commençant par s. De plus on a $A = \{y \in W \mid y \leq sx_2\} \cup \{\widehat{sx_2}\} \cup \{x\}$.. Donc par l'hypothèse de récurrence on a : $A \cup sA = \{y \in W \mid y \leq sx_2\} \cup \{\widehat{sx_2}, s\widehat{sx_2}(= \widehat{x}), x, sx\} = \{y \in W \mid y \leq sx\}$. Avec l'hypothèse de récurrence sur sx_2 on a bien : $A \cap sA = \{y \in W \mid y \leq sx_2(= tx)\}$.

□

Lemme 4.2. *Pour tout $x \in W$ on a $(T_s + 1) \sum_{y \in A} T_y = \sum_{y \in A \cup sA} T_y + v^{-2} \sum_{y \in A \cap sA} T_y$ où $A = \{y \in W \mid y \leq x\}$.*

Démonstration. On traitera seulement le cas où $\ell(x) \geq 2$ les uatres étant faciles à traiter.
On a vu après la définition 3.6 dans la remarque 3 que $H_x = v^{\ell(x)} T_x$ et $C_s = H_s + v = v(T_s + 1)$ on avait :

$$H_x C_s = \begin{cases} H_{sx} + vH_x & si\ sx > x \\ H_{sx} + v^{-1} H_x & si\ sx < x \end{cases}$$

D'où :

$$(T_s + 1)T_x = \begin{cases} v^{-(\ell(x)+1)} H_{sx} + v^{-\ell(x)} H_x & si\ sx > x \\ v^{-2}(v^{-(\ell(x)-1)} H_{sx} + v^{-\ell(x)} H_x & si\ sx < x \end{cases} = \begin{cases} T_{sx} + T_x & si\ sx > x \\ v^{-2}(T_{sx} + T_x) & si\ sx < x \end{cases}$$

Soit $x \in W$ et $A = \{y \in W \mid y \leq x\}$.

. Si x possède une expression réduite commençant par s donc il existe x_1 tel que $x = sx_1$ et $\ell(x_1) = \ell(x) - 1$. Nous allons utiliser deux expressions de A :
$A = \{e\} \sqcup \{y = ty_1,\ \ell(y_1) = \ell(y) - 1 \ell(y_1) \leq n-2\} \sqcup \{y = sy_1,\ \ell(y_1) = \ell(y) - 1\ et\ \ell(y_1) \leq n-1\}$
$A = \{e, T_s\} \sqcup \{y = ty_1,\ \ell(y_1) = \ell(y) - 1\ et\ \ell(y_1) \leq n-2\} \sqcup \{y = sty_1,\ \ell(y_1) = \ell(y) - 2\ et\ \ell(y_1) \leq n-2\}$

D'où : $\sum_{y \in A} (T_s + 1)T_y = (T_s + 1)T_e + \sum_{\substack{y = ty_1 \\ \ell(y_1) \leq n-2}} (T_s + 1)T_y + \sum_{\substack{y = sy_1 \\ \ell(y_1) \leq n-1}} (T_s + 1)T_y$

$$= \sum_{\substack{y = ty_1 \\ \ell(y_1) \leq n-2}} (T_{sy} + T_y) \ +\ T_s + 1 + v^{-2} \left(\sum_{\substack{y = sy_1 \\ \ell(y_1) \leq n-1}} (T_{sy} + T_y) \right)$$

$$= \left(\sum_{\substack{y = sty_1 \\ \ell(y_1) \leq n-2}} T_y \ +\ \sum_{\substack{y = ty_1 \\ \ell(y_1) \leq n-2}} T_y \ +\ T_s + 1 \right) \ +\ v^{-2} \left(1 + \sum_{\substack{y = ty_1 \\ \ell(y_1) \leq n-2}} T_y + \sum_{\substack{y = sy_1 \\ \ell(y_1) \leq n-1}} T_y \right)$$

$$= \sum_{y \in A} T_y + v^{-2} \sum_{y \in A} T_y$$

Or dans ce cas on a $A = A \cup sA = A \cap sA$, ce qui prouve la proposition.

. Sinon x n'a que des expressions réduite commençant par t. Soit x_1 tel que $x = tx_1$ et $\ell(x_1) = \ell(x) - 1$. Ainsi on a $\ell(sx) = \ell(s) + \ell(x)$ donc $T_s T_x = T_{sx}$, par le même argument on obtient $T_s T_{\widehat{x_1}} = T_{s\widehat{x_1}}$. On a $A = (A \cap sA) \cup \{\widehat{x_1}, x\}$ et $A \cup sA = (A \cap sA) \cup \{\widehat{x_1}, x, \widehat{x}, sx\}$. Et on remarque qu'on pourra utiliser le cas précédent pour $A \cap sA$, car il est associé à x_1 qui commence par s.

D'où $(T_s + 1) \sum_{y \in A} T_y = (T_s + 1) \left(\sum_{y \in A \cap sA} T_y \right) \ +\ (T_s + 1)T_{\widehat{x_1}} \ +\ (T_s + 1)T_x$. Par le premier cas

et ce que l'on a dit précédemment on obtient :
$(T_s+1)\sum\limits_{y\in A} T_y = \left(\sum\limits_{y\in A\cap sA} T_y\right) + v^{-2}\left(\sum\limits_{y\in A\cap sA} T_y\right) + T_{\widehat{x}} + T_{\widehat{x_1}} + T_{sx} + T_x$
$= \sum\limits_{y\in A\cup sA} T_y + v^{-2}\sum\limits_{y\in A\cap sA} T_y$
Ce qui conclut.

□

Proposition 4.3. *Si (W,S) est un groupe diédral ($S=\{s,t\}$) alors la base auto-duale est de la forme :*

$$\underline{H}_x = v^{\ell(x)}\sum_{y\leq x} T_y$$

Démonstration. Posons $\gamma_x = v^{\ell(x)}\sum\limits_{y\leq x} T_y$.
On a bien $\forall x\in W,\ \gamma_x \in v^{\ell(x)}T_x + \sum\limits_{y<x} v\mathbb{Z}[v]v^{\ell(y)}T_y$ car $y<x \Rightarrow \ell(y)<\ell(x)$.
Il suffit donc de montrer que les γ_x sont auto-duaux :
Par récurrence sur la longueur de x :
.Initialisation :
On a $T_e = 1$ auto-dual.
On a déjà vérifié que pour tout $s\in S,\ v(T_s+1)$ auto-dual.

.Hérédité :
Soit $n\in\mathbb{N}, n\neq 0,\ n\neq 1$. Supposons pour tout $y\in W,\ \ell(y)<n,\ \gamma_y$ auto-dual. Soit $x\in W,\ \ell(x)=n$.
Il existe $s\in S$ tel que $x=sx_1$ avec $\ell(x_1)=\ell(x)-1$. On a aussi $\ell(x_1)\geq 1$. Et donc $x=stx_2$ avec $\ell(x_2)=\ell(x_1)-1$ et $\ell(x_2)\geq 0$.
On note $A=\{y\in W \mid y\leq x_1\}$. On en déduit par la proposition 4.1 que $A\cup sA = \{y\in W \mid y\leq x\}$ et $A\cap sA = \{y\in W\mid y\leq x_2\}$.
Ainsi en utilisant aussi le lemme 4.2 on obtient :
$v(T_s+1)\gamma_{x_1} = v^{\ell(x_1)+1}(\sum\limits_{y\in A\cup sA} T_y + v^{-2}\sum\limits_{y\in A\cap sA} T_y) = v^{\ell(x)}\sum\limits_{y\leq x} T_y + v^{\ell(x)-2}\sum\limits_{y\leq x_2} T_y = \gamma_x + \gamma_{x_2}$
D'où γ_x est auto-dual.

□

4.2 Théorème fondamental de Soergel pour les groupes diédraux

Le théorème se sépare en deux cas majeurs, pour lesquels nous aurons besoin de lemmes. On prend toujours (W,S) un groupe diédral ($S=\{s,t\}$) et α une équation de l'hyperplan de s.

Lemme 4.4. *Soit Ω une représentation de dimension finie d'un groupe G sur un corps k de caractéristique $\neq 2$.*
Soit $A\subset\Omega$ un sous-ensemble fini.
Soit $s\in G$ tel que $sA=A$ et agissant comme réflexion sur Ω.
Alors :
1) On a un isomorphisme de bimodules gradués $R\otimes_{R^s} R(A)\cong R(A)\oplus R(A)[-2]$
2) Pour $R(A)^+\subset R(A)$ les invariants sous l'action de $s\times id$, la multiplication induit un isomorphisme $R\otimes_{R^s} R(A)^+ \xrightarrow{\sim} R(A)$

Démonstration. Soit Ω un espace vectoriel de dimension finie sur k. Toute réflexion $t:\Omega\to\Omega$ définie une involution $t: R(\Omega)\to R(\Omega)$. On choisit une équation $\beta\in\Omega^*$ de l'hyperplan de réflexion Ω^t. Comme pour tout $f\in R(\Omega)$ on peux décomposer $f=f_1+\beta f_2$ avec $f_1,f_2\in R(\Omega)^+$

alors $\dfrac{f_1+\beta f_2 - tf_1 - t\beta f_2}{2\beta} = f_2 \in R(\Omega)$ et donc on peut considérer :

$$\partial_t = \partial_t^\beta : \begin{cases} R(\Omega) & \to & R(\Omega) \\ f & \mapsto & \dfrac{f-tf}{2\beta} \end{cases}.$$

Soit $X \subset \Omega$ une réunion finie de sous-espaces vectoriels de Ω, $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, I fini, X stable par l'action de t. On note π la projection de $R(\Omega)$ sur $R(X)$. On a alors t qui induit une involution sur $R(X)$ ce qui nous donne une décomposition en espace propres $R(X) = R(X)^+ \oplus R(X)^-$.

On suppose qu'aucun des X_i n'est contenu dans Ω^t.
Notre opérateur ∂_t stabilise le noyau de la surjection $R(\Omega) \twoheadrightarrow R(X)$. En effet soit ϕ dans ce noyau, on le décompose en $\phi = \phi_1 + \beta\phi_2$ avec $\phi_1, \phi_2 \in R(\Omega)^+$. Si pour tout $x \in X$, $\phi_2(x) = 0$ alors $\partial_t(\phi) = 0$ qui est bien dans le noyau. Sinon il existe $x \in X$ tel que $\phi_2(x) \neq 0$ et ainsi $\phi_2 = 0$ dans $R(X)$, donc $\partial_t(\phi) = 0$.
Cela induit $\partial_t : R(X) \to R(X)$.

Vérifions que $\partial_t : R(X)^+ \to R(X)^-[2]$ et $m_\beta : \begin{cases} R(X)^-[2] & \to & R(X)^+ \\ f & \mapsto & \beta f \end{cases}$ sont mutuellement inverses l'une de l'autre. On a clairement $\partial_t(R(X)^+) \subset R(X)^-[2]$ en effet $t\partial_t(f) = t(\dfrac{f-tf}{2\beta}) = \dfrac{tf - t^2 f}{2\beta} = \dfrac{tf-f}{2\beta} = -\partial_t(f)$. Le [2] étant du à la division par β. On a aussi $m_\beta(R(X)^-[2] \subset R(X)^+$, en effet $tm_\beta(f) = t(\beta f) = (-\beta)(-f) = \beta f$.
. Soit $\phi \in R(X)^-[2]$ on a $\partial_t \circ m_\beta(\phi) = \partial_t(\beta\phi) = \dfrac{\beta\phi - t(\beta\phi)}{2\beta} = \dfrac{\beta\phi+\beta\phi}{2\beta} = \phi$
. Soit $f \in R(X)^+$ on a $m_\beta \circ \partial_t(f) = \dfrac{\beta(f-tf)}{2\beta} = \dfrac{\beta f - \beta t f}{2\beta} = \dfrac{\beta f + \beta f}{2\beta} = f$

On a donc un isomorphisme entre $R(X)^+$ et $R(X)^-[2]$.

On considère alors $\Omega = V \times V$, $t = s \times id$ et $X = Gr(A) = \bigcup_{x\in A} Gr(x)$. Il existe $v \in V$ tel que $tv \neq v$ et soit $x \in A$, comme on a $Gr(x) = \{(x\lambda, \lambda),\ \lambda \in V\}$ et $xV = V$ alors soit $\lambda \in V$ tel que $x\lambda = v$. Ainsi $(x\lambda, \lambda) \in Gr(x)$ mais $(x\lambda,\lambda) \notin (V\times V)^t$. Donc pour tout $x \in A$, on a $Gr(x) \not\subset (V \times V)^t$. On a donc $R(A) = R(A)^+ \oplus R(A)^-$ ainsi qu'un isomorphisme $R(A)^+ \simeq R(A)^-[2]$ avec la multiplication par $\beta = \alpha \otimes 1$ (on rappelle que α est une équation de l'hyperplan de s). On a vu dans la preuve du lemme 2.6 que $R = R^s \oplus \alpha R^s$.

On montre que $R(A)^+$ et $R(A)^-$ sont stable par multiplication par R^s. Pour tout $r \in R^s$ et $f \in R(A)^+$ que l'on note $f = f_1 \times f_2$ on a $rf \in R(A)^+$. En effet on a $(s\times 1)(rf) = (srf_1) \times (rf_2) = (rf_1) \times (rf_2) = rf$. De même on montre que pour tout $r \in R^s$ et $f \in R(A)^-$ on a $rt \in R(A)^-$.

Ainsi on obtient 2) : $R \otimes_{R^s} R(A)^+ \simeq R(A)^+ \oplus \alpha R(A)^+ \simeq R(A)^+ \oplus R(A)^- \simeq R(A)$
On a alors 1) qui en découle :
$R\otimes_{R^s} R(A) = R\otimes_{R^s} R(A)^+ \oplus R \otimes_{R^s} R(A)^- \simeq R(A) \oplus R\otimes_{R^s} R(A)^+[-2] \simeq R(A) \oplus R(A)[-2]$ □

Proposition 4.5. *Pour tous $x, y \in W$ avec $x \neq y$ on a $V^{-x} \neq V^{-y}$.*

Démonstration. On montre la contraposée, supposons $V^{-x} = V^{-y}$. On a alors que x et y agissent comme l'identité sur V/V^{-x}. Donc xy agit comme l'identité sur V/V^{-x}. Or sur pour tout $\lambda \in V^{-x}$ on a $yx(\lambda) = y(-\lambda) = \lambda$. Donc xy agit comme l'identité sur tout V. Comme la représentation V est fidèle alors $xy = id$ et donc $x = y$. □

Soit $s \in S$ et $x_0 \in W$ tel que $x_0 \neq e$ et $sx_0 > x_0$. On note $A = \{y \in W \mid y \leq x_0\}$. Par la proposition 4.1 on en déduit que $A \setminus sA = \{x_0, tx_0\}$. On a x_0 et tx_0 sont distincts car comme $sx_0 > x_0$ alors toutes les expressions réduites de x_0 commencent par t et donc $\ell(tx_0) = \ell(x_0) - 1$. Ainsi leur sous-espaces propres associés à la valeur propre -1 sont distincts par la proposition 4.5. Cela créé une sous-représentation $U \times \{0\}$ de $V \times V$ de dimension 2. Par le lemme 2.2 on a $(Gr(x_0) + Gr(tx_0)) \cap (U \times \{0\}) = Im(t - id) \times \{0\}$, ainsi il existe une forme linéaire $\beta \in V^* \times V^*$ qui s'annule sur $Gr(x_0) + Gr(tx_0)$ mais pas sur $U \times \{0\}$. On pose $\overline{\beta} = \beta_{Gr(A)}$ et $\overline{1} = 1_{Gr(A)}$, et on note alors M et N les sous-modules engendrés respectivement par $\overline{\beta}$ et $\overline{1}$ de $R(A)$ vu comme $R^s \otimes R$-module.

Lemme 4.6. *Pour tous $x, y, z \in W$ distincts deux à deux tels que leurs longueur n'ont pas tous la même parité. On a toujours $U \times 0 \subset Gr(x) + Gr(y) + Gr(z)$.*

Démonstration.
On peut supposer $z = e$ et $x, y \in \mathcal{T}$. En effet supposons que la parité de x soit la même que celle de y. On a $Gr(x) + Gr(y) + Gr(z) = (z \times 1)(Gr(z^{-1}x) + Gr(z^{-1}y) + Gr(e))$. Comme U est une sous-représentation, on a $zU = U$. Ainsi $U \times 0 \subset Gr(x) + Gr(y) + Gr(z) \Leftrightarrow U \times 0 \subset Gr(z^{-1}x) + Gr(z^{-1}y) + Gr(e)$.
On a $z^{-1}x$ et $z^{-1}y$ qui sont de longueur impaire. En effet il est clair que la longueur de z^{-1} est pair. On a pour tout $w \in W$ et $u \in W$ avec $\ell(u) = 1$ que $\ell(uw) = \ell(w) + 1$ ou $\ell(w) - 1$. Donc en réitérant le raisonnement on a pour tout $w \in W$ et $u \in W$ avec $\ell(u) = 2$ que $\ell(uw) = \ell(w) - 2$ ou $\ell(w)$ ou $\ell(w) + 2$, c'est à dire que $\ell(uw)$ est de la même parité que $\ell(w)$. Par récurrence immédiate on obtient pour tout $w \in W$ et $u \in W$ avec $\ell(u)$ paire que $\ell(uw)$ est de même parité que $\ell(w)$. Ainsi dans notre cas on obtient que $z^{-1}x$ et $z^{-1}y$ ont des longueurs impairs. Or tout élément de W de longueur impair est dans $\mathcal{T}$.
Par le lemme 2.2 on a $(Gr(x) + Gr(e)) \cap (U \times \{0\}) = Im(xe^{-1} - id) \times \{0\} = V^{-x} \times \{0\} \subset U \times \{0\}$ et $(Gr(y) + Gr(e)) \cap (U \times \{0\}) = Im(ye^{-1} - id) \times \{0\} = V^{-y} \times \{0\} \subset U \times \{0\}$.
Par la proposition 4.5 on a $V^{-x} \neq V^{-y}$. Ainsi comme $U \times \{0\}$ est de dimension 2, et que V^{-x} et V^{-y} sont de dimension 1, on obtient $U \times 0 \subset (Gr(x) + Gr(e)) \cap (U \times 0) \cup (Gr(y) + Gr(e)) \cap (U \times 0) \subset Gr(x) + Gr(y) + Gr(e)$. ☐

Lemme 4.7. *1) $M \cong R(A \cap sA)^+[-2]$ dans $R^s - mod_{\mathbb{Z}} - R$*
2) $N \cong R(A \cup sA)^+$ dans $R^s - mod_{\mathbb{Z}} - R$
3) $R(A) = M \oplus N$

Démonstration.
1) Pour $y \notin \{x_0, tx_0\}$, par le lemme 4.6 on a $U \times 0 \subset Gr(y) + Gr(x_0) + Gr(tx_0)$. Donc en particulier $\beta \not\equiv 0$ sur $Gr(y)$ pour tout $y \in A \cap sA$. Donc pour tout $f \in R(A)$ on a $[f\overline{\beta} = 0] \Leftrightarrow [f(Gr(A \cap sA)) = 0]$. Ainsi la multiplication par $\overline{\beta}$ définit un isomorphisme de $R(A \cap sA)[-2]$ dans $R(A)\overline{\beta}$. (On vient de montrer l'injectivité, la linéarité et la surjectivité sont évidentes.)
Mais l'image de $R^s \otimes R$ dans $R(A \cap sA)$ est précisément les $(s \times id)$-invariants, c'est-à-dire $R(A \cap sA)^+$. De plus l'image de $R^s \otimes R$ dans $R(A)$ est M.
On en conclut que $M \cong R(A \cap sA)^+[-2]$.

2)
Le $(R^s \otimes R)$-sous-module engendré par $\overline{1}$ dans $R(A \cup sA)$ est clairement $R(A \cup sA)^+$, et par définition le $(R^s \otimes R)$-sous-module engendré par $\overline{1}$ dans $R(A)$ est N.
Montrons que $\begin{array}{ccc} R(A \cup sA)^+ & \to & R(A) \\ f & \mapsto & f_{|Gr(A)} \end{array}$ est une injection, (c'est clairement linéaire).
Soit $f \in R(A \cup sA)^+$ tel que $f_{|Gr(A)} = 0$. On a $f \circ (s \times id) = f$. Donc $f(Gr(sA)) = f(Gr(A))$, ainsi $f_{|Gr(sA)} = 0$. D'où $f(Gr(A \cup sA)) = 0$, c'est-à-dire $f = 0$. On en déduit que $N \cong R(A \cup sA)^+$

3)
On montre d'abord que $R(A) = M + N$.
Soit α une équation de l'hyperplan V^s. Alors on a $R = R^s \oplus \alpha R^s$.
Donc $R \otimes R$ est engendré comme $(R^s \otimes R)$-module par $1 \otimes 1$ et $\alpha \otimes 1$. D'où $R \otimes R$ est aussi engendré par $1 \otimes 1$ et n'importe quel élément $\delta \in V^* \times V^*$ qui n'est pas $s \times id$ invariant. Notre β convient.
En effet si β était $s \otimes id$ invariant alors comme β s'annule sur $Gr(x)$ il s'annulera aussi sur $Gr(sx)$. Donc sur $Gr(x) + Gr(sx) + Gr(tx)$. Comme x, sx, tx sont trois éléments distincts deux à deux n'ayant pas tous leur longueur de même parité on a par le lemme 4.6 que $U \times 0 \subset Gr(x) + Gr(sx) + Gr(tx)$. Donc $\beta = 0$ sur $U \times 0$ ce qui est absurde. Ainsi $R(A) \subset M + N$ donc $R(A) = M + N$.

Montrons maintenant que $M \cap N = \{0\}$.
On a pour tout $y \in A \cap sA$ et pour tout $f \in N$, $f_{|Gr(y,sy)}$ est invariant par $s \times id$. Il suffit donc de montrer que pour tout $g \in M$ on a $[g_{|Gr(y,sy)}$ est invariant par $s \times id\ ] \Leftrightarrow [g_{|Gr(y,sy)} = 0]$. Il suffit donc de montrer que $\beta_{|Gr(y,sy)}$ n'est pas invariante par $s \otimes id$ car β engendre le $R^s \otimes R$-module M. De plus comme $Gr(y, sy) \subset Gr(y) + Gr(sy)$ il suffit de montrer que : $\beta_{|Gr(y)+Gr(sy)}$ n'est pas invariant par $s \times id$.

Soit $y \in A \cap sA$. Si $f \in M$ est invariante par $s \times id$ sur $Gr(y) + Gr(sy)$, alors pour tout $\lambda \in V$ on a $f(y\lambda, \lambda) = f(sy\lambda, \lambda)$. Donc $f(y\lambda - sy\lambda, 0) = 0$ c'est-à-dire $f((y - sy)\lambda, 0) = 0$. On vérifie aisément que pour tout $\lambda \in V$, $(y - sy)\lambda \in V^{-s}$. Or $dim(V^{-s}) = 1$, donc f s'annule sur $V^{-s} \times 0$.

Ainsi par l'absurde si β est invariante par $s \times id$ sur $Gr(y) + Gr(sy)$ alors β s'annule sur $V^{-s} \times \{0\}$. Or β s'annule sur $Gr(x) + Gr(tx)$ donc sur $V^{-t} \times \{0\}$. Or on a $V^{-s} \times \{0\} \subset U \times \{0\}$ et $V^{-t} \times \{0\} \subset U \times \{0\}$. Comme $V^{-s} \neq V^{-t}$ et qu'ils sont tous les deux de dimension 1, on a $V^{-s} + V^{-t} = U$.
Ainsi β s'annule sur $U \times 0$, ce qui est absurde.

$\square$

Théorème 4.8. *Soit $(W, S), |S| = 2$ un système de Coxeter, et soit V une représentation réflexion vecteur fidèle sur un corps infini.*
Alors le morphisme de groupe additif :

$$\epsilon : \begin{cases} \mathcal{H} & \to \ < R > \\ v^n \underline{H}_x & \mapsto \ < R(\leq x) > [n + \ell(x)] \end{cases}$$

est un morphisme d'anneau

Démonstration. On a $(T_s + 1)$ qui engendre $\mathcal{H}$ en tant que $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-algèbre et $(\sum\limits_{y \leq x} T_y)_x)$ qui engendre $\mathcal{H}$ en tant que $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ module.
Ainsi il suffit de montrer que à x fixé,
$\epsilon((T_s+1) \sum\limits_{y \leq x} T_y) = \epsilon(T_s+1) \otimes_R \epsilon(\sum\limits_{y \leq x} T_y) \qquad (=< R \otimes_{R^s} R > \otimes_R < R(A) > \simeq < R \otimes_{R^s} R(A)) >$
On pose $A = \{y \in W \mid y \leq x\}$
Par le lemme 4.2 on a $(T_s + 1) \sum\limits_{y \in A} T_y = \sum\limits_{y \in A \cup sA} T_y + v^{-2} \sum\limits_{y \in A \cap sA} T_y$.
D'où :
$\epsilon((T_s + 1) * \sum\limits_{y \leq x} T_y) = \epsilon(\sum\limits_{y \in A \cup sA} T_y) \oplus \epsilon(v^{-2} \sum\limits_{y \in A \cap sA} T_y) =< R(A \cup sA) > \oplus < R(A \cap sA)[-2] >$

Ainsi cela revient à montrer l'isomorphisme de bimodule graduée suivant :

$$R(A \cup sA) \oplus R(A \cap sA)[-2] \simeq R \otimes_{R^s} R(A)$$

Nous allons le faire en trois cas. Si $A = \{e\}$ alors l'isomorphisme a montré est $R(1, s) \simeq R \otimes_{R^s} R$. Il a été montré dans le lemme 2.6.
Pour le cas $A = sA$ on a avec le lemme 4.4 que $R \otimes_{R^s} R(A) \cong R(A) \oplus R(A)[-2]$. Ce qui est exactement l'isomorphisme recherché.
Maintenant si $A = \{y \in W \mid y \leq x\},\ x \neq e,\ sx > x\}$. On se retrouve donc dans les suppositions des lemmes 4.6 et 4.7. On obtient alors que $R \otimes_{R^s} R(A) \simeq R \otimes_{R^s} R(A \cap sA)^+[-2] \oplus R \otimes_{R^s} R(A \cup sA)^+$. Or $A \cap sA = s(A \cap sA)$ et $A \cup sA = s(A \cup sA)$ Donc on peux utiliser le cas précédent pour ceux là et on obtient bien : $R \otimes_{R^s} R(A) \cong R(A \cap sA)[-2] \oplus R(A \cup sA)$.

□

5 Passage aux systèmes de Coxeter

On considère maintenant (W, S) un système de Coxeter avec $|S| < +\infty$.

5.1 Existence d'une représentation réflexion fidèle

Proposition 5.1. *Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. On considère $f_1, \dots, f_r \in V^*$ qui sont linéairement indépendant et on pose $K = \bigcap Ker(f_i)$. Alors les $\overline{f_i} = \begin{array}{ccc} (V\diagup K) & \to & k \\ [\lambda] & \mapsto & f_i(\lambda) \end{array}$ sont bien définis et forment une base de $(V\diagup K)^*$.*

Démonstration. Les $\overline{f_i}$ sont bien définis par la définition de K. En effet soient $\lambda, \mu \in V$ tels que $[\lambda] = [\mu]$. Alors il existe $x \in K$ tel que $\lambda = \mu + x$. Ainsi $\overline{f_i}([\lambda]) = f_i(\lambda) = f_i(\lambda) + f_i(x) = f_i(\lambda + x) = f_i(\mu) = \overline{f_i}([\mu])$.

Montrons tout d'abord que les $\overline{f_i}$ forment une famille libre. Soient $a_i \in k$ tels que $\sum\limits_i a_i\overline{f_i} = 0$. Par définition on a pour tout $v \in V$ $f_i(v) = \overline{f_i}([v])$. Ainsi on a $\sum\limits_i a_i f_i = 0$. Par la liberté des f_i on obtient que pour tout i, $a_i = 0$. On obtient donc la liberté des $\overline{f_i}$

Montrons maintenant que c'est une famille génératrice. On note π la projection de V sur $V\diagup K$. Soit $\overline{\phi} \in (V\diagup K)^*$. On pose $\phi \in V^*$ telle que $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$. On a $\phi(K) = 0$, donc $K \subset Ker(\phi)$. Montrons que $\phi \in Vect((f_i)_{i=1\dots r})$.
On complète les f_i en une base B de V^*, $B = (f_1, \dots, f_r, g_{r+1}, \dots, g_n)$.
On note $(e_1, \dots, e_r, b_{r+1}, \dots\dots, b_n)$ la base pré-duale.
On écrit x dans la base pré-duale, $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i e_i + \sum\limits_{i=r+1}^{n} x_i b_i$
On a $x \in K \Leftrightarrow \forall i \in [|1, r|],\ f_i(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [|1, r|],\ x_i = 0 \Leftrightarrow x \in Vect((b_i)_{i=r+1\dots n})$.
D'où $K = Vect((b_i)_{i=r+1\dots n})$. On écrit ϕ dans la base, $\phi = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i f_i + \sum\limits_{i=r+1}^{n} u_i g_i$. Comme $K \subset Ker(\phi)$, on a pour tout $i \in [|r+1, n|]$, $\phi(b_i) = u_i = 0$. Ainsi on a $\phi \in Vect((f_i)_{i=1\dots r})$. On a pour tout $[v] \in V\diagup K$, $\overline{\phi}([v]) = \overline{\phi} \circ \pi(v) = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i f_i(v) = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i \overline{f_i}([v])$. Ainsi $\overline{\phi} = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i \overline{f_i} \in Vect((\overline{f_i})_{i=1\dots r})$.

□

Théorème 5.2. *Soit (W, S) un système de Coxeter. Soit V un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soient $(e_s)_{s\in S}$ des vecteurs linéaires indépendants et $(f_s)_{s\in S}$ des formes linéaires sur V linéairement indépendantes tels que :*

$$< e_s, f_t >= -2\cos(\frac{\pi}{m_{s,t}})\ \forall s, t \in S$$

On suppose que la dimension de V est la plus petite possible. On défini $\rho : W \to GL(V)$ comme $\rho(s)(v) = v - < v, f_s > e_s$.
Alors ρ est une représentation réflexion fidèle de W.

Démonstration.
On montre d'abord que c'est une représentation.
Comme les relations $s^2 = 1$ sont claires, il suffit de montrer que les relations de tresses sont vérifiées :
Soient $s, t \in S,\ v \in V$. On a $\rho(st)(v) = \rho(s)(\rho(t)(v)) = \rho(t)(v) - < \rho(t)(v), f_s > e_s$
$= v - < v, f_t > e_t - < v - < v, f_t > e_t, f_s > e_s$

$= v - < v, f_t > e_t - < v, f_s > e_s + < v, f_t >< e_t, f_s > e_s$
En l'appliquant à $v = e_s$ et $v = e_t$ on obtient :
$\rho(st)(e_s) = e_s + 2\cos(\frac{\pi}{m_{s,t}})e_t - 2e_s + 4\cos^2(\frac{\pi}{m_{s,t}})e_s = 2\cos(\frac{\pi}{m_{s,t}})e_t + (4\cos^2(\frac{\pi}{m_{s,t}}) - 1)e_s$
$\rho(st)(e_t) = e_t - 2e_t + 2\cos(\frac{\pi}{m_{s,t}})e_s - 4\cos(\frac{\pi}{m_{s,t}})e_s = -e_t - 2\cos(\frac{\pi}{m_{s,t}})e_s$
On retrouve bien les mêmes équations que dans la représentation naturelle des systèmes de Coxeter fait dans le lemme 1.5.

Montrons maintenant que cette représentation est fidèle.
On pose $E =< \{e_s\}_{s\in S} >$. Il est clair que E est stable sous l'action de ρ. Ainsi les calculs précédents sont toujours valables et on en déduit que E est une sous-représentation de W isomorphe à la représentation naturelle qui est fidèle.

On montre maintenant que cette représentation est de réflexion.
On note $K = \bigcap_{s\in S} Ker(f_s)$. On a W qui agit trivialement sur K.
Montrons que l'action contragrédiente de ρ induite sur $(V/K)^*$ est aussi isomorphe à la représentation naturelle. On notera π la projection associée. Par la proposition 5.1 on a que $(V/K)^* =< (\overline{f_s})_{s\in S} >$.
Pour montrer que cette représentation est isomorphe à la représentation naturelle on montrera juste que la représentation est de la même forme que la précédente :
Soient $s \in S,\ \alpha \in (V/K)^*,\ v \in V/K$
On a $\rho^*(s)(\alpha)(v) = \alpha(sv) = \alpha(v - < v, f_s > e_s)$
$= (< v, \alpha > - < v, f_s >< e_s, \alpha >) = (\alpha - < e_s, \alpha > f_s)(v)$
D'où $\rho^*(s)(\alpha) = \alpha - < e_s, \alpha > f_s$. On retrouve alors la même définition que la représentation ρ où e_s et f_s ont changé de place. Un calcul similaire donnerait les relations trouvées précédemment et donc les relations de tresses sont vérifiées pour cette application. Les relations $s^2 = 1$ sont toujours claires. De plus le cardinal de E correspond au cardinal de S. On en déduit que cette représentation est isomorphe à la représentation naturelle qui est fidèle par le théorème 1.8.
Ainsi on en déduit que V/K est isomorphe à la représentation contragrédiente E^* et est donc fidèle.

Par l'hypothèse sur la minimalité de la dimension de V on a une filtration de représentation : $0 \subset K \subset E \subset V$. Pour $K \subset E$, on le montre par l'absurde. Supposons $K \not\subset E$. lors il existe $x_0 \in K$ tel que $x_0 \notin E$. On complète x_0 en une base de V : $(x_0, a_1, \ldots, a_n)$. On note $V_2 = Vect(a_1, \ldots, a_n)$; On a bien $E \in V_2$ et les relations sont toujours vraies dans V_2. Cela est absurde avec la minimalité de la dimension de V.

On a alors que $(e_s, e_t) = \frac{1}{2} < e_s, f_t >$ est une forme invariante symétrique sur E et une forme invariante symétrique non dégénérée sur E/K. En effet c'est exactement celle utilisée dans le lemme 1.5.
Soit $x \in W$ tel que l'ensemble de ses points fixes $V^x \subset V$ est un hyperplan. Montrons que $x \in \mathcal{T}$. On a forcément $x \neq e_W$ car les points fixes de e_W est l'espace tout entier et non un hyperplan.
Soit $X \in End(V)$ qui correspond à l'image de x. Puisque x est un produit de réflexions alors le déterminant de X est soit 1 soit -1.

Supposons $\det(X) = 1$ et trouvons une absurdité.
Soit $\mathbb{R}c$ un complémentaire de V^x. On note alors l'image de c $X(c) = v_0 + \lambda c$ avec $v_0 \in V^x$ et

$\lambda \in \mathbb{R}$. Comme V^x est stable par X et que $\det(X) = 1$ alors on a que la composante sur $\mathbb{R}c$ de l'image de c est 1. D'où $X(c) = v_0 + c$. Ainsi pour tout $v \in V^x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $X(v+\alpha c) = v+\alpha v_0+\alpha c$.
On peut choisir c dans E. En effet, par l'absurde si $E \subset V^x$, alors $X_{|E} = id_E$. Or on a aussi $id_{V_{|E}} = id_E$. Comme le groupe agit fidèlement sur E on a $x = e_W$, ce qui est absurde.
On en déduit que $v_0 \in E$ car $v_0 = X(c) - c$, $c, X(c) \in E$ et E est un espace vectoriel.
On montre aussi que $v_0 \notin K$. En effet, par l'absurde si $v_0 \in K$ alors on a $X(v + \alpha c) = v + \alpha c$ dans V/K. Ainsi on a que l'action de x est la même que celle de e_W. Or le groupe agit fidèlement sur V/K on a donc $x = e_w$, ce qui est absurde.
Par invariance sur E on a $(v + \alpha c, v + \alpha c) = (v + \alpha v_0 + \alpha c, v + \alpha v_0 + \alpha c)$.
Ainsi $2\alpha(v, v_0) + \alpha^2(2(c, v_0) + (v_0, v_0)) = 0$.
Or ceci est vrai pour tous $v \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On en déduit donc que pour tout $v \in E$, $(v, v_0) = 0$ donc $v_0 \in K$, ce qui est absurde.

On en déduit que $det(X) = -1$. On a donc que x agit comme réflexion sur V et sur V/K.
On considère le cône de Tits associé à W. On a que W agit transitivement sur les chambres du cône, par définition, mais aussi fidèlement par le lemme 1.7 qui nous dit que pour tout $w \in W$ on a $wC \cap C = \emptyset$.
Ainsi les points fixes de x ne peuvent rencontrer aucune chambres car sinon $x = e_W$.
Soit C la chambre fondamentale. On a C et xC qui sont séparés par un nombre fini d'hyperplans V^z avec $z \in \mathcal{T}$
Or un certain espace ouvert non vide de l'hyperplan de x consiste en des points sur des segments joignant C et xC (en regardant l'image par C de la projection $\frac{id + x}{2}$)
Or puisque ce sont des points fixes cette partie se doit d'être recouverte par l'ensemble fini des hyperplans V^z précédents. Or ceci n'est possible que si l'hyperplan de x coïncide avec l'hyperplan d'un $z \in \mathcal{T}$.
Si $x \neq z$ alors on peux recommencer la discussion avec zx qui est de determinant 1 ce qui est absurde.
Donc $x = z \in \mathcal{T}$.

□

5.2 Théorème fondamentale de Soergel

Théorème 5.3. *Soit V une représentation réflexion vecteur fidèle du système de Coxeter (W, S) sur un corps infini. Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke et R l'anneau des fonctions polynomiales sur V. Il existe un unique morphisme d'anneau*

$$\epsilon : \mathcal{H} \to <\mathcal{R}>$$

tel que $\epsilon(v) =< R[1] >$ et $\epsilon(T_s + 1) =< R \otimes_{R^s} R >$ pour tout $s \in S$.

Démonstration.
Pour l'unicité, il suffit de remarquer que l'algèbre de Hecke est aussi engendrée par les $(T_s+1)_{s\in S}$ par le lemme 3.2 en tant que $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-algèbre.
Pour l'existence, il suffit de le prouver pour un groupe diédral car l'algèbre de Hecke n'est décrit qu'avec des relations impliquant deux générateurs. Avec le théorème 4.8 nous avons dans le cas des groupes diédraux exhibé une telle application.

$$\epsilon : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & <\mathcal{R}> \\ v^n \underline{H}_x & \mapsto & < R(\leq x) > [n + \ell(x)] \end{array}$$

Le théorème nous dit que c'est un morphisme d'anneau. De plus on a $\epsilon(v) = \epsilon(v\underline{H}_e =< R[1] >$ et avec le lemme 2.6 on obtient $\epsilon(T_s + 1) = \epsilon(v^{-1}\underline{H}_s) =< R(1, s) >=< R \otimes_{R^s} R >$. □

Conclusion

Pour poursuivre on pourrait prouver que le morphisme ϵ est en fait un isomorphisme d'anneau puis discuter sur la conjecture de Soergel suivante.

Théorème. *Pour tout $x \in W$, il existe un R-bimodule indécomposable $\mathbb{Z}$-graduée $B_x \in \mathcal{R}$ tel que $\epsilon(\underline{H}_x) =< B_x >$.*

Références

[JM] Jean Michel. *Groupes de réflexions complexes : polycopié de cours.* 2004. <https ://webusers.imj-prg.fr/ jean.michel/papiers/cours2004.pdf>

[W1] Wolfang Soergel. *Kazhdan-Lusztig polynomials and a combinatoric for tilting modules.* 1997. (article)

[W2] Wolfang Soergel. *Kazhdan-Lusztig polynomials and indecomposable bimodules over polynomial rings.* 2006. (article accessible en ligne <http ://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/PReprints/BimodKorrekturversioneng.pdf>)

[HUMP] James E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*, pages 145-147. Cambridge University Press, 1992.